MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Ľuboš Krnáč

Intervaly spolehlivosti pro rozdíly a podíly proporcí

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. Mgr. Michal Kulich, Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2018

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

S radosťou by som chcel poďakovať svojmu vedúcemu doc. Mgr. Michalovi Kulichovi, Ph.D. za nezameniteľné rady, ochotnú pomoc pri problémoch a jeho dôraz, ktorý doviedol túto prácu do podoby, ktorá je zrelá na svetlo sveta.

Název práce: Intervaly spolehlivosti pro rozdíly a podíly proporcí

Autor: Ľuboš Krnáč

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. Mgr. Michal Kulich, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Bakalárska práca sa zaoberá tvorbou intervalov spoľahlivosti pre rozdiel parametrov dvoch rozdelení. V prvej časti sa zaoberáme problémom tvorby intervalov spoľahlivosti pre rozdiel. Ďalej sa snažíme nájsť postačujúce predpoklady pre metódu MOVER, ktorej výsledkom sú nové, netriviálne intervaly spoľahlivosti pre rozdiel, ktoré majú uspokojivé vlastnosti. Takisto sú v práci uvedené príklady a aplikácie, ako aj príklad, kde by mohla metóda zlyhávať. Tretia kapitola obsahuje grafy pravdepodobností pokrytia pre rôzne vstupné intervaly. Tieto grafy slúžia na porovnanie dosiahnutých hladín pokrytia pre jednotlivé vstupné intervaly spoľahlivosti, menovite *Clopper-Pearsonov*, *Waldov*, *Wilsonov* a *logitový*.

Klíčová slova: interval spoľahlivosti, MOVER metóda, pravdepodobnosť pokrytia

Title: Confidence intervals for differences and ratios of proportions

Author: Ľuboš Krnáč

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: doc. Mgr. Michal Kulich, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: The Bachelor thesis deals with the creation of confidence intervals for difference of parameters of two distributions. In the first part we consider the problem of making such confidence intervals for differences. Then we try to find sufficient conditions for MOVER, which leads to new, non-trivial confidence intervals for difference of parameters of two distributions. These confidence intervals have improved and desired properties. There are also examples of usage of MOVER, and possible difficulties. The third section contains graphs of coverage probabilities for different input intervals. These graphs are made to show different levels of achieved coverage probabilities for some input intervals, namely *Clopper-Pearson*, *Wald*, *Wilson* and *logit*.

Keywords: confidence interval, MOVER, coverage probability

Obsah

Úvod

V tejto práci sa budeme zaoberať jednou zo základných štatistických metód odhadu - intervalovým odhadom. Budeme sa zameriavať na konkrétny prípad intervalu spoľahlivosti pre rozdiel parametrov rozdelení. Na tento problém sa budeme pozerať zaujímavým a novátorským prístupom uvedeným v Newcombe (2013). Naším cieľom bude podať formálne správny dôkaz čo najvšeobecnejšieho tvrdenia, založeného na myšlienke pochádzajúcej z Newcombe (2013).

Pre rozdiel parametrov dvoch rozdelení ale vo všeobecnosti neexistuje mnoho možných prístupov, ako pre ne získať intervaly spoľahlivosti. Budeme sa venovať zaujímavej myšlienke ako vytvoriť takéto intervaly spoľahlivosti, ktorá využíva už napočítané hranice intervalov spoľahlivosti pre jednotlivé parametre.

V prvej kapitole sa zameriame na príklady intervalov spoľahlivosti pre parameter θ_X alternatívneho rozdelenia. Alternatívne rozdelenie je rozdelenie náhodnej veličiny X, pre ktorú platí

$$P(X = 1) = \theta_X$$
$$P(X = 0) = 1 - \theta_X,$$

pre $\theta_X \in (0,1)$. Pravdepodobnosť θ_X sa nazýva aj *pravdepodobnosť úspechu*. Alternatívne rozdelenie používame všade tam, kde sledovaný pokus či experiment môže mať len dva stavy. Sú nimi *úspech*, keď $X = 1$ a *neúspech*, keď $X = 0$. Alternatívnym rozdelením sa riadi napríklad hod mincou (hlava, rub), či úspešnosť liečby (vyliečený, nevyliečený). Je zjavné, že toto rozdelenie má využitie v mnohých oblastiach vedy.

1. Intervaly spoľahlivosti pre parameter alternatívneho rozdelenia.

Nech $X_1, ..., X_n$ je náhodný výber z rozdelenia, ktoré závisí od parametra θ_X. Našou úlohou je podať inferenciu o parametri θ_X na základe nášho náhodného výberu. Jednou z možností je nájsť interval, ktorý tento parameter s nejakou vopred určenou pravdepodobnosťou obsahuje. Takýto interval nazývame *intervalom spoľahlivosti* pre parameter θ_X s pravdepodobnosťou pokrytia $1-\alpha$ pre nejaké vopred určené $\alpha \in (0,1)$. Nech X je štatistika spočítaná z náhodného výberu, ktorej rozdelenie závisí od parametra θ_X. Formálne, interval $(C_L(X),C_U(X))$ je interval spoľahlivosti s (asymptotickou) pravdepodobnosťou pokrytia $1-\alpha$ pre parameter θ_X, ak platí

$$P((C_L(X), C_U(X)) \ni \theta_X) = 1 - \alpha \quad (\to 1 - \alpha).$$

V našej práci sa budeme zaoberať intervalovým odhadom parametru $\theta_X - \theta_Y$, kde θ_X a θ_Y sú parametre rozdelení, ktoré skúmame. Základným kameňom nášho postupu bude využitie intervalov spoľahlivosti pre jednotlivé parametre θ_X a θ_Y k tvorbe intervalu spoľahlivosti pre ich rozdiel $\theta_X - \theta_Y$.

Jedným z rozdelení, ktoré má bohatú rodinu intervalov spoľahlivosti pre jeho parameter θ_X, je *alternatívne* rozdelenie. Keďže toto rozdelenie je prakticky veľmi zaujímavé a vhodné na ilustrovanie našej metódy, uvedieme niekoľko intervalov spoľahlivosti pre parameter θ_X alternatívneho rozdelenia.

1.1 Jednovýberový problém

V celej kapitole budeme uvažovať náhodný výber $X_1, ..., X_n$ z alternatívneho rozdelenia s parametrom θ_X a používať značenie $\hat{\theta}_X = \overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ je $1-\frac{\alpha}{2}$-kvantil normovaného normálneho rozdelenia.

1.1.1 Clopper-Pearsonov interval

Clopper-Pearsonov interval, alebo *presný* interval, je založený na presnom rozdelení štatistiky $T_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, kde $X_i \sim Alt(\theta_X)$. Z teórie vieme, že T_n má binomické rozdelenie s parametrami n a θ_X. Keďže binomické rozdelenie je úzko spojené s *Beta* rozdelením, *Clopper-Pearsonov* interval spoľahlivosti sa dá zapísať ako

$$\Big(B\Big(\frac{\alpha}{2}, T_n, n - T_n + 1\Big), B\Big(1 - \frac{\alpha}{2}, T_n + 1, n - T_n\Big)\Big),$$

kde $B(y,n,k)$ je y-kvantil beta rozdelenia s parametrami n,k. Keďže *Beta* rozdelenie je ďalej v spojení s *Fisherovým* rozdelením, iný tvar intervalu spoľahlivosti je

$$\Big(\frac{T_n q_L(\alpha)}{T_n q_L(\alpha) + n - T_n + 1}, \frac{(T_n + 1) q_U(\alpha)}{(T_n + 1) q_U(\alpha) + n - T_n}\Big),$$

kde $q_L(\alpha)$ je $\frac{\alpha}{2}$-kvantil rozdelenia $F_{2T_n,2(n-T_n+1)}$ a $q_U(\alpha)$ je $1-\frac{\alpha}{2}$-kvantil rozdelenia $F_{2(T_n+1),2(n-T_n)}$, $F_{n,m}$ je *Fischerovo* rozdelenie s n a m stupňami voľnosti.

1.1.2 Waldov interval

Waldov interval, alebo *klasický asymptotický interval*, je založený na centrálnej limitnej vete. Z centrálnej limitnej vety máme

$$\sqrt{n}\frac{\hat{\theta}_X-\theta_X}{\sqrt{\theta_X(1-\theta_X)}}\xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1).$$

Keďže $\hat{\theta}_X$ je konzistentným odhadom θ_X, tak z Cramér-Slutského vety máme, že

$$\sqrt{n}\frac{\hat{\theta}_X-\theta_X}{\sqrt{\hat{\theta}_X(1-\hat{\theta}_X)}}\xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1).$$

Jednoduchým vyjadrením θ_X potom dostávame *Waldov interval* spoľahlivosti

$$\left(\hat{\theta}_X - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{\theta}_X(1-\hat{\theta}_X)}{n}}\,,\,\hat{\theta}_X + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{\theta}_X(1-\hat{\theta}_X)}{n}}\right).$$

1.1.3 Waldov interval s korekciou na spojitosť

Waldov interval s korekciou na spojitosť je jednoducho *Waldov interval* natiahnutý na oboch koncoch o $1/2n$. Teda máme

$$\left(\hat{\theta}_X - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{\theta}_X(1-\hat{\theta}_X)}{n}}-\frac{1}{2n}\,,\,\hat{\theta}_X + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{\theta}_X(1-\hat{\theta}_X)}{n}}+\frac{1}{2n}\right).$$

Tento interval sa vyznačuje lepšími vlastnosťami ako klasický *Waldov* interval.

1.1.4 Wilsonov interval

Wilsonov interval je, podobne ako *Waldov* interval, založený na asymptotickom výsledku s tým rozdielom, že je použitý skutočný (teoretický) rozptyl a nie odhad, ako v prípade vyššie. Teda vychádzame z

$$\sqrt{n}\frac{\hat{\theta}_X-\theta_X}{\sqrt{\theta_X(1-\theta_X)}}\xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1),$$

čo vedie ku kvadratickej rovnici pre hranice *Wilsonovho* intervalu spoľahlivosti. Interval má potom tvar

$$\frac{n}{n+z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}\left(\hat{\theta}_X+\frac{z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2n}\mp z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{\theta}_X(1-\hat{\theta}_X)}{n}+\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2n}}\right).$$

1.1.5 Logitová metóda

Logitová metóda je založená na *logite*, teda logaritme *šance*. *Šancou* nazývame pomer $\frac{\theta_X}{1-\theta_X}$. Princípom metódy je odhad transformovaného parametru $\ln \frac{\theta_X}{1-\theta_X}$, pre ktorý vytvoríme interval spoľahlivosti vďaka asymptotickej normalite $\hat{\theta}_X$ a použitím Δ-vety. Z centrálnej limitnej vety máme

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_X - \theta_X) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \theta_X(1-\theta_X)).$$

Keďže $g(x) = \ln \frac{x}{1-x}$ je diferencovateľná na okolí θ_X, kde $\theta_X \in (0{,}1)$, z Δ-vety máme

$$\sqrt{n}\Big(g(\hat{\theta}_X) - g(\theta_X)\Big) \xrightarrow{\mathcal{D}} N\Big(0, \frac{1}{\theta_X} + \frac{1}{1-\theta_X}\Big).$$

Ďalej, z Cramér-Slutského vety máme

$$\sqrt{\hat{\theta}_X(1-\hat{\theta}_X)}\Big(\ln \frac{\hat{\theta}_X}{1-\hat{\theta}_X} - \ln \frac{\theta_X}{1-\theta_X}\Big) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0{,}1),$$

z čoho si vyjadríme $\ln \frac{\theta_X}{1-\theta_X}$ a dostaneme interval spoľahlivosti pre transformáciu parametra θ_X. Tento interval spoľahlivosti potom prevedieme na interval spoľahlivosti pre θ_X aplikovaním inverznej transformácie k $\ln(\frac{\theta_X}{1-\theta_X})$, ktorá je monotónna. Pretože dosiahnutá pravdepodobnosť pokrytia je len asymptotická, *logitová metóda* je znovu asymptotická metóda. Nech $D_n = \sqrt{\frac{1}{n\hat{\theta}_X(1-\hat{\theta}_X)}}$. Potom interval spoľahlivosti bude mať tvar

$$\left(\frac{\frac{\hat{\theta}_X}{1-\hat{\theta}_X}\exp(-z_{1-\frac{\alpha}{2}}D_n)}{1+\frac{\hat{\theta}_X}{1-\hat{\theta}_X}\exp(-z_{1-\frac{\alpha}{2}}D_n)}, \frac{\frac{\hat{\theta}_X}{1-\hat{\theta}_X}\exp(z_{1-\frac{\alpha}{2}}D_n)}{1+\frac{\hat{\theta}_X}{1-\hat{\theta}_X}\exp(z_{1-\frac{\alpha}{2}}D_n)}\right).$$

1.2 Dvojvýberový problém

Ako referenčný interval spoľahlivosti pre rozdiel pravdepodobností budeme používať *Waldov interval pre rozdiel parametrov*, ktorý sa často označuje aj ako *klasický asymptotický* interval spoľahlivosti. Nech $X_1, ..., X_n$ a $Y_1, ..., Y_m$ sú nezávislé náhodné výbery z alternatívneho rozdelenia s parametrom θ_X, resp. θ_Y. Označme $\hat{\theta}_X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ a $\hat{\theta}_Y = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^m Y_j$. Potom interval spoľahlivosti pre $\theta_X - \theta_Y$ je

$$\Big(\hat{\theta}_X - \hat{\theta}_Y \mp z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{\theta}_X(1-\hat{\theta}_X)}{n} + \frac{\hat{\theta}_Y(1-\hat{\theta}_Y)}{m}}\Big).$$

Waldov prístup je jednou z mála jednoduchých metód, ktoré máme k dispozícii na hľadanie intervalu spoľahlivosti pre rozdiel parametrov. Intervaly spoľahlivosti pre rozdiel parametrov dvoch alternatívnych rozdelení majú veľké využitie v praxi.
Ako príklad môžeme uviesť skúmanie účinnosti liečby novým liekom oproti starému. Prvej skupine jedincov bol podávaný liek 1, druhej skupine, nezávisle od prvej, podávaný liek 2. Na jedincoch pozorujeme, či liečba bola účinná, alebo nie. Teda máme náhodný výber $X_1, ..., X_n$ z alternatívneho rozdelenia s parametrom θ_X a náhodný výber $Y_1, ..., Y_m$ z alternatívneho rozdelenia s parametrom θ_Y.

Potom nás zaujíma rozdiel $\theta_Y - \theta_X$, ktorý by predstavoval zväčšenie/zmenšenie účinnosti nového lieku oproti starému.

Náš prístup, ktorého hlavná myšlienka je v Newcombe (2013), nám dáva nové možnosti, ako sa na tento problém pozerať. Za určitých podmienok dostávame nové intervaly spoľahlivosti pre rozdiel, ktoré, ako ukážeme, sa správajú lepšie, čo sa týka pravdepodobností pokrytia. Metóda je síce inšpirovaná práve prípadom dvoch alternatívnych rozdelení, ale my dokážeme vetu vo všeobecnosti bez obmedzenia na alternatívne rozdelenie. Ako uvidíme, existuje veľké množstvo iných rozdelení, ktoré budú naše podmienky splňovať.

2. MOVER

Naším hlavným cieľom je podať formálny dôkaz postupu uvedeného v Newcombe (2013)(str. 132-135). Hlavnou myšlienkou je použitie už napočítaných intervalov spoľahlivosti na vytvorenie intervalu spoľahlivosti pre rozdiel parametrov rozdelení, ktoré nás zaujímajú. Tento spôsob nám umožňuje skonštruovať nové intervaly spoľahlivosti pre rozdiel, ktoré sú často efektívnejšie, resp. viac vhodné pre daný problém. Postup je založený na dualite testovania hypotéz a intervalových odhadov, ktorá je zhrnutá v nasledujúcej vete.

Veta - dualita intervalových odhadov a testovania hypotéz
Nech X je štatistika, ktorej rozdelenie závisí od parametra $\theta_X \in \Theta \subset \mathbb{R}$. Nech je daný test hypotézy $H_0 : \theta_X = \theta$ proti alternatíve $H_A : \theta_X \neq \theta$ na hladine $\alpha \in (0,1)$. Potom, všetky hodnoty parametra θ, pre ktoré nezamietame nulovú hypotézu, tvoria množinu spoľahlivosti $C(X)$ s pravdepodobnosťou pokrytia $1-\alpha$, t.j. množinu $C(X)$ s vlastnosťou $P(C(X) \ni \theta_X) = 1-\alpha$. V prípade, že $C(X)$ je interval, dostávame interval spoľahlivosti s pravdepodobnosťou pokrytia $1-\alpha$.

Obdobná veta platí aj pre test na asymptotickej hladine α a interval spoľahlivosti s asymptotickou pravdepodobnosťou pokrytia $1-\alpha$. Tento poznatok využijeme. Nech $X_1, ..., X_n$ je náhodný výber z rozdelenia s parametrom θ_X. Uvažujme obojstranný *Wilsonov* test nulovej hypotézy $H_0 : \theta_X = \theta$ proti alternatíve $H_A : \theta_X \neq \theta$ pre parameter θ_X na hladine α. Potom H_0 nezamietame práve vtedy, keď

$$\sqrt{n}\frac{|\hat{\theta}_X - \theta|}{\hat{\sigma}(\theta)} < z_{1-\frac{\alpha}{2}},$$

kde $\hat{\theta}_X$ je bodový odhad θ_X, $\frac{\hat{\sigma}(\theta)}{\sqrt{n}}$ je konzistentný odhad smerodajnej odchýlky $\hat{\theta}_X$, teda $\frac{\hat{\sigma}^2(\theta)}{n}$ je konzistentným odhadom rozptylu $\hat{\theta}_X$. Potom, pre všetky θ, pre ktoré nezamietame nulovú hypotézu na hladine α, platí

$$\hat{\theta}_X - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\hat{\sigma}(\theta)}{\sqrt{n}} < \theta < \hat{\theta}_X + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\hat{\sigma}(\theta)}{\sqrt{n}}.$$

Pre hranice intervalu spoľahlivosti (L_X, U_X) potom platí

$$L_X = \hat{\theta}_X - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\hat{\sigma}(L_X)}{\sqrt{n}} \qquad a \qquad U_X = \hat{\theta}_X + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\hat{\sigma}(U_X)}{\sqrt{n}}. \tag{2.1}$$

Z rovností (2.1) by sme potom mohli uvažovať odhady rozptylov (na hraniciach) tvaru

$$\frac{\hat{\sigma}^2(L_X)}{n} = \frac{(\hat{\theta}_X - L_X)^2}{z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}} \qquad \text{a} \qquad \frac{\hat{\sigma}^2(U_X)}{n} = \frac{(U_X - \hat{\theta}_X)^2}{z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}, \tag{2.2}$$

ktoré dostaneme jednoduchým vyjadrením $\frac{\hat{\sigma}(L_X)}{\sqrt{n}}$, resp. $\frac{\hat{\sigma}(U_X)}{\sqrt{n}}$ z (2.1) a umocnením týchto odhadov.
V rade prípadov, keď rozdelenie závisí len od jedného parametra, platí $\hat{\sigma}(\theta) =$

$\sigma(\theta)$. Pre rozdelenia, ktorých rozptyl závisí od viacerých parametrov, je výraz pre $\hat{\sigma}(\theta)$ rozdielny od výrazu pre $\sigma(\theta)$, pretože ostatné parametre, ktoré nie sú naším primárnym cieľom, odhadneme ich konzistentným odhadom. Takýmto rozdelením je napríklad *Gamma* rozdelenie.

Uvažujme teraz postup uvedený v Newcombe (2013)(str.134). Tento postup sa zameriava na rozdiel parametrov dvoch alternatívnych rozdelení. Nech nezávislé náhodné výbery $X_1, ..., X_n \sim Alt(\theta_X)$, $Y_1, ..., Y_m \sim Alt(\theta_Y)$. Nech (L_X, U_X) a (L_Y, U_Y) sú intervaly spoľahlivosti s pravdepodobnosťou pokrytia $1-\alpha$ pre θ_X, resp. θ_Y. Potom interval spoľahlivosti pre $\theta_X - \theta_Y$ s pravdepodobnosťou pokrytia $1-\alpha$ dostaneme z

$$\frac{\hat{\theta}_X - \hat{\theta}_Y - (\theta_X - \theta_Y)}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2(\theta_X)}{n} + \frac{\hat{\sigma}^2(\theta_Y)}{m}}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1). \tag{2.3}$$

Výraz (2.3) získame štandardným postupom za platnosti predpokladov konzistencie odhadov $\hat{\sigma}$. Po dosadení zodpovedajúcich odhadov tvaru (2.2) za zodpovedajúce odhady v (2.3) - pre dolnú hranicu $\frac{\hat{\sigma}^2(L_X)}{n}$ a $\frac{\hat{\sigma}^2(U_Y)}{m}$, pre hornú hranicu $\frac{\hat{\sigma}^2(L_Y)}{m}$ a $\frac{\hat{\sigma}^2(U_X)}{n}$ - a úprave, dostávame interval spoľahlivosti (L,U) pre rozdiel $\theta_X - \theta_Y$, ktorý má tvar

$$L = \hat{\theta}_X - \hat{\theta}_Y - \sqrt{(\hat{\theta}_X - L_X)^2 + (U_Y - \hat{\theta}_Y)^2}, \tag{2.4}$$

$$U = \hat{\theta}_X - \hat{\theta}_Y + \sqrt{(U_X - \hat{\theta}_X)^2 + (\hat{\theta}_Y - L_Y)^2}. \tag{2.5}$$

Použili sme dvojice odhadov $\hat{\sigma}(L_X), \hat{\sigma}(U_Y)$ a $\hat{\sigma}(L_Y), \hat{\sigma}(U_X)$, pretože keby sme chceli len jednoducho skombinovať jednotlivé intervaly spoľahlivosti pre θ_X a θ_Y, dostali by sme interval $(L_X - U_Y, L_Y - U_X)$. Chceli by sme odhadnúť rozptyly niekde 'blízko' potenciálnych hraníc intervalu spoľahlivosti pre rozdiel. Pre dolnú hranicu využijeme teda odhady $\hat{\sigma}(L_X), \hat{\sigma}(U_Y)$, pre hornú hranicu zase $\hat{\sigma}(L_Y), \hat{\sigma}(U_X)$. Teda, kombináciou (2.2) a (2.3) sme dostali hľadaný výsledok. Lenže tento prístup má slabé miesta. Ani v texte Newcombe (2013), ani v článku Zou a Donner (2008), na ktorý sa Newcombe (2013) odkazuje, sa nenachádza dôkaz, ktorý by ukázal, že interval s hranicami (2.9) a (2.10) má asymptoticky pravdepodobnosť pokrytia $1-\alpha$. Ďalšou slabinou je uvedenie intervalu spoľahlivosti pre rozdiel bez akýchkoľvek predpokladov. Takisto nie je detailnejšie, resp. formálne zdôvodnené, prečo odhady rozptylov sú práve (2.2). Naším cieľom bolo preto nájsť čo najvšeobecnejšie postačujúce predpoklady, aby veta platila a podať formálny dôkaz.

2.1 Formálne zdôvodnenie MOVER-u

Nech $X_1, ..., X_n$ a $Y_1, ..., Y_m$ sú nezávislé náhodné výbery z rozdelenia závisiaceho od parametra θ_X, resp. θ_Y. Buďte $\hat{\theta}_X, \hat{\theta}_Y$ odhady parametrov θ_X, θ_Y. Nech pre rozsahy výberov platí $\frac{n}{m} \to q > 0$ pre m,n idúce do $+\infty$. Nech platia nasledujúce podmienky:

I.

$$\sqrt{n}\frac{\hat{\theta}_X - \theta_X}{\sigma(\theta_X)} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1), \qquad \sqrt{m}\frac{\hat{\theta}_Y - \theta_Y}{\sigma(\theta_Y)} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1), \tag{2.6}$$

kde $\sigma(\theta_X), \sigma(\theta_Y)$ sú asymptotické smerodajné odchýlky (druhé odmocniny z rozptylov $\hat{\theta}_X, \hat{\theta}_Y$), ktoré závisia na hodnote parametra θ_X resp. θ_Y.
Buď (L_X, U_X), resp. (L_Y, U_Y) asymptotický interval spoľahlivosti pre parametre θ_X, resp. θ_Y s pravdepodobnosťou pokrytia $1-\alpha$. Nech intervaly sa dajú zapísať v tvare

II.

$$L_X = \hat{\theta}_X - \hat{\sigma}_{LX}\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}, \qquad U_X = \hat{\theta}_X + \hat{\sigma}_{UX}\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}, \tag{2.7}$$

III.

$$L_Y = \hat{\theta}_Y - \hat{\sigma}_{LY}\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{m}}, \qquad U_Y = \hat{\theta}_Y + \hat{\sigma}_{UY}\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{m}}, \tag{2.8}$$

kde $\hat{\sigma}_{LX}, \hat{\sigma}_{UX}$, resp. $\hat{\sigma}_{LY}, \hat{\sigma}_{UY}$ sú konzistentné odhady $\sigma(\theta_X)$, resp. $\sigma(\theta_Y)$.

Potom interval (L,U), ktorý je tvaru

$$L = \hat{\theta}_X - \hat{\theta}_Y - \sqrt{(\hat{\theta}_X - L_X)^2 + (U_Y - \hat{\theta}_Y)^2}, \tag{2.9}$$

$$U = \hat{\theta}_X - \hat{\theta}_Y + \sqrt{(U_X - \hat{\theta}_X)^2 + (\hat{\theta}_Y - L_Y)^2}, \tag{2.10}$$

je intervalom spoľahlivosti pre rozdiel $\theta_X - \theta_Y$ s asymptotickou pravdepodobnosťou pokrytia $1-\alpha$.
Dôkaz:
Z predpokladov (2.6) máme, že $\hat{\theta}_X \xrightarrow{P} \theta_X$ a $\hat{\theta}_Y \xrightarrow{P} \theta_Y$. Vzhľadom na vyjadrenie intervalov spoľahlivosti v podmienke (II) pre jednotlivé parametre θ_X, θ_Y máme pre odhady rozptylov na hraniciach vzťahy

$$\hat{\sigma}^2_{LX} = \frac{(\hat{\theta}_X - L_X)^2}{z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}} \qquad \text{a} \qquad \hat{\sigma}^2_{UX} = \frac{(U_X - \hat{\theta}_X)^2}{z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}, \tag{2.11}$$

ktoré sú z predpokladov konzistentnými odhadmi $\sigma^2(\theta_X)$. Rovnako dostaneme

$$\hat{\sigma}^2_{LY} = \frac{(\hat{\theta}_Y - L_Y)^2}{z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}} \qquad \text{a} \qquad \hat{\sigma}^2_{UY} = \frac{(U_Y - \hat{\theta}_Y)^2}{z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}, \tag{2.12}$$

ktoré sú z predpokladov konzistentnými odhadmi $\sigma^2(\theta_Y)$. Potom z vety o spojitej transformácii máme

$$\sqrt{\hat{\sigma}^2_{LX}\frac{m}{n} + \hat{\sigma}^2_{UY}} \xrightarrow{P} \sqrt{\frac{\sigma^2(\theta_X)}{q} + \sigma^2(\theta_Y)}.$$

Stačí teda ukázať, že

$$\sqrt{m}(\hat{\theta}_X - \hat{\theta}_Y - (\theta_X - \theta_Y)) \xrightarrow{\mathcal{D}} N\Big(0, \frac{\sigma^2(\theta_X)}{q} + \sigma^2(\theta_Y)\Big),$$

čo ale máme z Cramér-Slutského vety, Cramér-Woldovej vety a nezávislosti náhodných výberov štandardným postupom. Teda,

$$\frac{(\hat{\theta}_X - \hat{\theta}_Y - (\theta_X - \theta_Y))}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2_{LX}}{n} + \frac{\hat{\sigma}^2_{UY}}{m}}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1).$$

Po dosadení odhadov rozptylov máme

$$\frac{(\hat{\theta}_X - \hat{\theta}_Y - (\theta_X - \theta_Y))}{\sqrt{\frac{(\hat{\theta}_X - L_X)^2}{z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}} + \frac{(U_Y - \hat{\theta}_Y)^2}{z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1). \tag{2.13}$$

Používame práve $\hat{\sigma}_{LX}$ a $\hat{\sigma}_{UY}$, pretože výsledok (2.13) budeme používať pri dolnej hranici cieľového intervalu. Inak povedané, keby len skombinujeme intervaly pre jednotlivé parametre θ_X, θ_Y, tak by sme mali interval pre $\theta_X - \theta_Y$ tvaru

$$(L_X - U_Y, U_X - L_Y).$$

Z tohto dôvodu pre hornú hranicu použijeme $\hat{\sigma}_{UX}$ a $\hat{\sigma}_{LY}$ a identickým postupom dostaneme

$$\frac{(\hat{\theta}_X - \hat{\theta}_Y - (\theta_X - \theta_Y))}{\sqrt{\frac{(U_X - \hat{\theta}_X)^2}{z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}} + \frac{(\hat{\theta}_Y - L_Y)^2}{z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1). \tag{2.14}$$

Potom ale

$$P(\theta_X - \theta_Y \in (L,U)) = 1 - P(\theta_X - \theta_Y \leq L) - P(\theta_X - \theta_Y \geq U) =$$

$$= 1 - P\left(\frac{\hat{\theta}_X - \hat{\theta}_Y - (\theta_X - \theta_Y)}{\sqrt{\frac{(\hat{\theta}_X - L_X)^2}{z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}} + \frac{(U_Y - \hat{\theta}_Y)}{z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}}} \geq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) - P\left(\frac{\hat{\theta}_X - \hat{\theta}_Y - (\theta_X - \theta_Y)}{\sqrt{\frac{(\hat{\theta}_Y - L_Y)^2}{z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}} + \frac{(U_X - \hat{\theta}_X)}{z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}}} \geq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 1 - \alpha,$$

pretože podľa (2.13) a (2.14) majú výrazy asymptoticky štandardizované normálne rozdelenie. Teda máme, že (L,U) je interval spoľahlivosti pre $\theta_X - \theta_Y$ s asymptotickou pravdepodobnosťou pokrytia $1 - \alpha$. $\square$

Poznámka:

Názov 'MOVER', teda 'Method of Variance Estimate Recovery', je založený na rovnostiach (2.1), resp. (2.2). Odhad rozptylu dostaneme práve vyjadrením z rovníc (2.1), teda 'znovuzískame' odhad rozptylu, ktorý ďalej používame. Voľný preklad by potom mohol byť 'metóda znovuzískania odhadu rozptylu'.

2.2 Dôsledky a aplikácie

2.2.1 Asymptoticky normálne odhady

Uvažujme odhad $\hat{\theta}_X$ parametru θ_X taký, že

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_X - \theta_X) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,\sigma^2(\theta_X)).$$

Potom vďaka vlastnosti normálneho rozdelenia máme, že

$$\sqrt{n}\frac{\hat{\theta}_X - \theta_X}{\sigma(\theta_X)} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1).$$

Tento vzťah využívame pri tvorbe *Wilsonovských* intervalov spoľahlivosti, ktoré majú práve hľadaný tvar (II). Keby sme nahradili $\sigma(\theta)$ jeho konzistentným odhadom $\hat{\sigma}(\hat{\theta}_X)$, tak dostávame *Waldove intervaly*, ktoré znovu splňujú podmienky na tvar intervalov spoľahlivosti.

Asymptoticky normálne sú napríklad odhady, ktoré pochádzajú z teórie maximálnej vierohodnosti. Pre tieto odhady za splnených podmienok regularity platí

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_X - \theta_X) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,J^{-1}(\theta_X)), \tag{2.15}$$

kde $J(\theta_X)$ je Fisherova informácia. Či už zoberieme skutočnú $J(\theta_X)$, alebo jej odhad $J(\hat{\theta}_X)$, dostaneme intervaly spoľahlivosti, ktoré sú požadovaného tvaru. Naša metóda pokrýva teda veľké množstvo odhadov.

2.2.2 Waldov interval spoľahlivosti pre alternatívne rozdelenie

Nech $X_1,..,X_n \sim Alt(\theta_X)$, $Y_1,...,Y_m \sim Alt(\theta_Y)$. Potom z centrálnej limitnej vety máme

$$\sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - \theta_X}{\sigma(\theta_X)} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1).$$

Teda ak si označíme $\hat{\theta}_X = \overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, $\hat{\theta}_Y = \overline{Y}_m = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} Y_j$, tak máme splnené (2.6). Zo slabého zákona veľkých čísel máme navyše $\hat{\theta}_X \xrightarrow{P} \theta_X$. Potom, využitím vety o spojitej transformácii dostávame, že

$$\sqrt{\hat{\theta}_X(1-\hat{\theta}_X)} \xrightarrow{P} \sqrt{\theta_X(1-\theta_X)} = \sigma(\theta_X).$$

Pomocou Cramér-Slutského vety dostávame pre hranice intervalu spoľahlivosti

$$(L_X,U_X) = \left(\hat{\theta}_X \mp z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{\theta}_X(1-\hat{\theta}_X)}{n}}\right).$$

Teda máme $\hat{\sigma}_{LX} = \hat{\sigma}_{UX} = \sqrt{\hat{\theta}_X(1-\hat{\theta}_X)} \xrightarrow{P} \sigma(\theta_X)$, čiže $\hat{\sigma}_{LX}$ a $\hat{\sigma}_{UX}$ sú konzistentné odhady $\sigma(\theta_X)$. Podobne $\hat{\sigma}_{LY} = \hat{\sigma}_{UY} = \sqrt{\hat{\theta}_Y(1-\hat{\theta}_Y)}$ sú konzistentné odhady $\sigma(\theta_Y)$.

Teda nám platí veta, a tak pre rozdiel $\theta_X - \theta_Y$ máme asymptotický interval spoľahlivosti tvaru (2.10).

Poznámka:

Tento výsledok je priamy dôsledok asymptotickej normality.

2.2.3 Problémové miesto: Rovnomerné rozdelenie

Naša veta ale nemusí platiť pre úplne ľubovoľný odhad, na čo chceme poukázať. Nech $X_1, ..., X_n$ je náhodný výber z rovnomerného rozdelenia $R(0,\theta)$. Z teórie maximálnej vierohodnosti máme maximálne vierohodný odhad (MLE)

$$\hat{\theta}_n = \max\{X_1,..,X_n\}.$$

Rozdelenie však nespĺňa podmienky regularity, teda nám neplatia asymptotické výsledky pre MLE. Pre odvodený odhad máme rozdelenie

$$F_{\hat{\theta}_n}(x) = P(\hat{\theta}_n < x) = \left(\frac{x}{\theta}\right)^n,$$

pre $x \in (0, \theta)$. Tento odhad ale nie je nestranný, pretože $E\hat{\theta}_n = \frac{n}{n+1}\theta$. Tým pádom odhad definovaný $\tilde{\theta}_n = \frac{n+1}{n} \max\{X_1, ...,X_n\}$ bude nestranným odhadom s rozdelením

$$F_{\tilde{\theta}_n}(x) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(\frac{x}{\theta}\right)^n. \tag{2.16}$$

Navyše máme

$$n(\theta - \tilde{\theta}_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} Z, \tag{2.17}$$

kde Z je náhodná veličina s distribučnou funkciou $F_Z(x) = 1 - e^{-1-\frac{x}{\theta}}$ (posunuté exponenciálne rozdelenie). Aby sme mohli použiť vetu, potrebovali by sme overiť asymptotickú normalitu $\tilde{\theta}_n$, ako je v predpoklade (2.6). Lenže podľa (2.17) a Cramér-Slutského vety máme, že

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) = -\frac{1}{\sqrt{n}} n(\theta - \hat{\theta}_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} 0,$$

čo je degenerovaná náhodná veličina, a teda odhad nespĺňa (2.6).

Je teda vidieť, že postup metódy MOVER tu môže zlyhávať, keďže v dôkaze sme využívali symetriu asymptotického rozdelenia štatistiky, na ktorej je založený interval spoľahlivosti. V tomto prípade ale máme štatistiku $R_n = \frac{n(\theta - \hat{\theta}_n)}{\theta}$, ktorá má asymptoticky posunuté exponenciálne rozdelenie s distribučnou funkciou $1 - e^{-1-x}$, pre $x \geq -1$. Asymptotický interval spoľahlivosti je potom

$$\left(\frac{\hat{\theta}_n}{1 - \frac{y_{\frac{\alpha}{2}}}{n}}, \frac{\hat{\theta}_n}{1 - \frac{y_{1-\frac{\alpha}{2}}}{n}}\right),$$

kde y_α značí α kvantil posunutého exponenciálneho rozdelenia. Pre tieto kvantily ale neplatí $(y_\alpha)^2 = (y_{1-\alpha})^2$ (rozdelenie nie je symetrické), čo sme využili pri tvorbe (2.9) a (2.10). Teda $(1-\alpha)\%$ interval spoľahlivosti pre rozdiel parametrov rovnomerných rozdelení nemôže mať požadovaný tvar.

3. Porovnanie pravdepodobností pokrytia

Kľúčovým hodnotením intervalu spoľahlivosti je jeho *pravdepodobnosť pokrytia* $CP(\theta)$, ktorá je definovaná ako

$$CP(\theta) = P_\theta(\theta \in (C_L(X), C_U(X))),$$

kde $(C_L(X), C_U(X))$ je $(1-\alpha)\%$ interval spoľahlivosti pre parameter θ, X je štatistika, ktorej rozdelenie závisí od θ. Zvyčajne používané hodnoty pre α sú 0,1, 0,05, 0,01. Z definície intervalu spoľahlivosti by táto hodnota mala byť $1-\alpha$. Z dôvodov, ako sú nespojitosť rozdelenia, spôsob vytvorenia intervalu alebo asymptotickosť intervalu spoľahlivosti, túto hodnotu ale nedosahujeme presne. Krivky spoľahlivosti nám približujú správanie sa $CP(\theta)$ pre rôzne hodnoty θ, a teda sú akýmsi meradlom správnosti použitého intervalu spoľahlivosti.

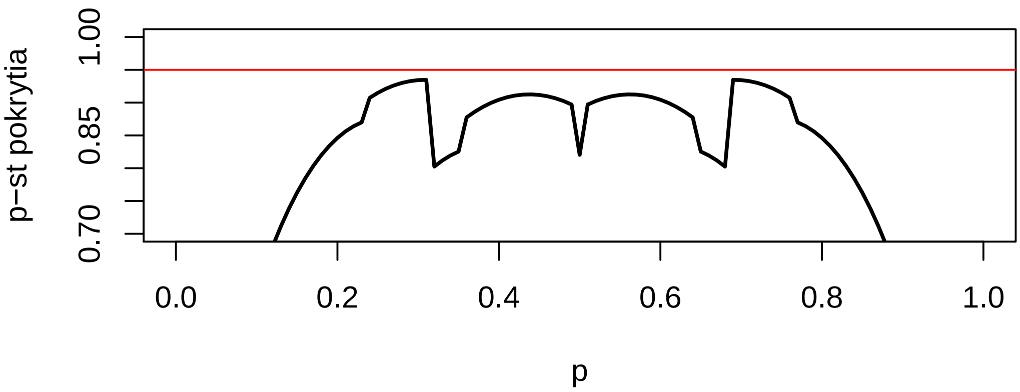
Ako príklad si vezmime *Waldov* interval spoľahlivosti pre parameter p alternatívneho rozdelenia. Potom pre rôzne veľkosti výberov máme pravpodobnosti pokrytia zobrazené na 3.1a a 3.1b.

Pre niektoré prípady sme schopní 'invertovať' intervaly spoľahlivosti tak, aby sme dostali interval pre štatistiku X, ktorej rozdelenie poznáme. Formálne máme

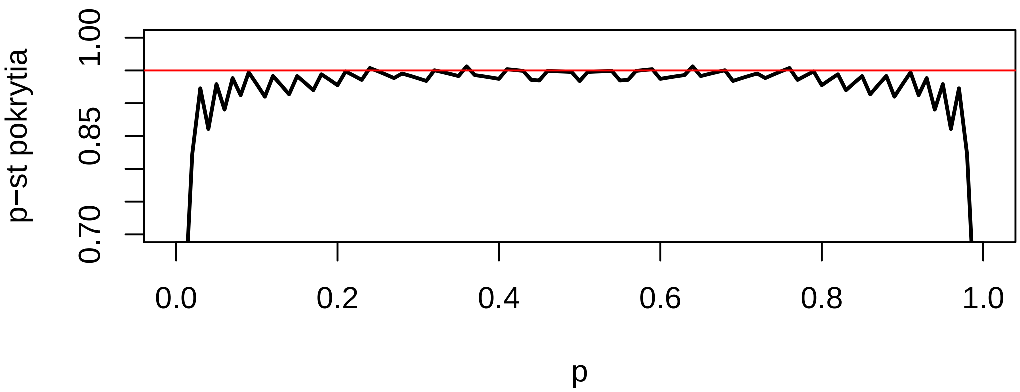
$$CP(\theta) = P_\theta(\theta \in (C_L(X), C_U(X))) = P_\theta(X \in (A_n(\theta), B_n(\theta))).$$

Toto invertovanie je ale v rade prípadov komplikované, resp. nie je vôbec možné explicitne vypočítať $A_n(\theta), B_n(\theta)$. Preto k tvorbe grafov pre intervaly spoľahlivosti pre rozdiely pravdepodobností alternatívnych rozdelení používame iný postup. Grafy sú založené na nasledujúcej myšlienke.
Máme náhodné výbery $X_1, ..., X_n \sim Alt(\theta_X)$ a $Y_1, ..., Y_m \sim Alt(\theta_Y)$. Vezmime si pevný rozdiel $\theta_X - \theta_Y = \delta$. Ďalej, nech θ_X je vhodné, t.j. také, že je možné dostať $\delta = \theta_X - \theta_Y$ pre $\theta_Y \in (0{,}1)$. θ_X bude premenná, s ktorou budeme hýbať.
Začíname s $CP(\delta) = 0$. Vieme, že $\sum_{i=1}^n X_i \sim Bi(n,\theta_X)$ a $\sum_{j=1}^m Y_j \sim Bi(m,\theta_Y)$. Najprv pre jednotlivé hodnoty náhodných veličín $\sum_{i=1}^n X_i = a, \sum_{j=1}^m Y_j = b$, $a \in \{0, ..., n\}$, $b \in \{0, ..., m\}$ spočítame intervaly spoľahlivosti pre jednotlivé parametre θ_X, θ_Y, keďže budeme potrebovať dolné a horné hranice týchto intervalov. Potom si vytvoríme interval spoľahlivosti pre rozdiel parametrov a overíme, či δ doň patrí. Ak áno, pripočítame pravdepodobnosť $P(Z_1 = a, Z_2 = b)$ k hodnote už napočítanej $CP(\delta)$. Ak nie, pokračujeme s ďalšou kombináciou a,b. Takto opakujeme pre všetky možné hodnoty a,b. Tento postup je ale časovo náročný, je vhodné ho preto používať len na malé až stredne veľké náhodné výbery. Pre veľké výbery by si žiadal náš postup optimalizáciu.

Obr. 3.1: Pravdepodobnosť pokrytia Waldových intervalov pre parameter p alternatívneho rozdelenia s rozsahmi výberov a) $n = 9$ b) $n = 86$.



(a)



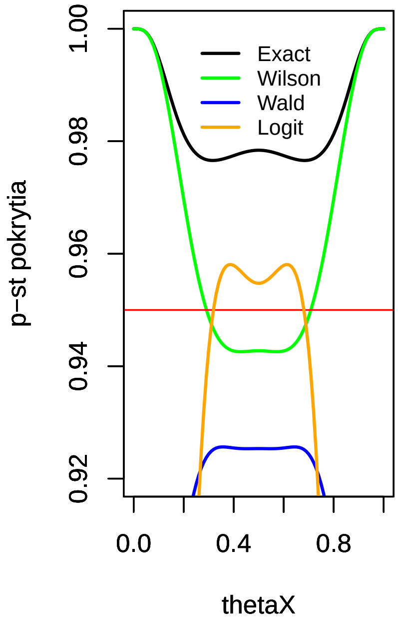
(b)

3.1 Využitie MOVER pre alternatívne rozdelenie

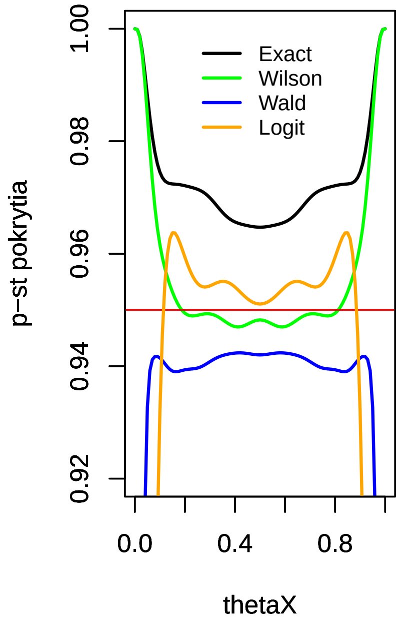
Vzhľadom na vyjadrenie Waldovho intervalu je klasický asymptotický interval pre rozdiel totožný s intervalom vytvoreným metódou MOVER. Ďalšie intervaly, ktoré budeme používať ako vstup, sú *Wilsonov*, *Clopper-Pearsonov* a *logitový*. Na grafoch 3.2a , 3.2b a 3.2c vidíme pravdepodobnosti pokrytia pre $\theta_X - \theta_Y = 0$, kde θ_X beží cez všetky možné hodnoty. Metóda MOVER očividne funguje, keďže pravdepodobnosti pokrytia sa s rastúcimi rozsahmi výberov blížia k predpísanej hodnote 0,95 (červená čiara). Waldov interval, ako vieme, pre malé výbery nedáva žiadanú presnosť, keďže pre malé rozsahy v 3.2a sa pravdepodobnosť pokrytia pre Waldov prípad nedostala ani nad hranicu 0,92 a pre stredné rozsahy sa len zospodu blíži požadovanej presnosti.
Ďalej uvedieme aj grafy pravdepodobností pokrytia pre rozdiely $\delta = 0{,}5$ a $\delta = -0{,}25$.

Celkovo máme za to, že nami dokázaná a použitá metóda 'MOVER' je funkčným nástrojom, ktorý nám otvára nové možnosti tvorenia intervalov spoľahlivosti pre rozdiel parametrov rozdelenia. So zväčšujúcimi sa rozsahmi náhodných výberov sa pravdepodobnosti pokrytia pre všetky vstupné intervaly približujú k žiadanej hodnote pokrytia 0,95. V našom prípade sme sa zamerali na rozdiel parametrov alternatívnych rozdelení. Najlepšie fungovali *Wilsonovské* vstupné intervaly, čo je vidieť na všetkých grafoch 3.2, 3.3 a 3.4, keďže sú vo väčšine prípadov najbližšie k požadovanej hranici 0,95. V literatúre odporúčaný *logitový* interval dáva uspokojivé výsledky len pre stredne veľké výbery, čo je vidieť na grafoch 3.2b, 3.3b a 3.4b. Takisto jeho pravdepodobnosti pokrytia silne závisia na polohe parametra θ_X. Uspokojivé výsledky sú len okolo stredu intervalu možných hodnôt θ_X pre dané δ. Pre *Clopper-Pearsonov* vstupný interval spoľahlivosti máme dosiahnuté pravdepodobnosti pokrytia vysoko nad žiadanou hodnotou 0,95, intervaly sú teda zbytočne dlhé. *Waldov* interval ako vstup dáva uspokojivé výsledky len pre veľké rozsahy ako je vidieť na grafoch 3.2c, 3.3c a 3.4c. Je zjavné, že oproti klasickému *Waldovmu* prístupu sme dosiahli výrazné zlepšenie pravdepodobnosti pokrytia dokonca aj pre malé výbery pri použití *Wilsonovho* intervalu ako vstupu. Metóda MOVER je cenným nástrojom pre tvorbu intervalov spoľahlivosti pre rozdiel parametrov rozdelení. Jej hlavnou výhodou je možnosť tvoriť takéto intervaly (na základe *Wilsonovského* prístupu), ktoré by iným spôsobom nebolo možné zostrojiť.

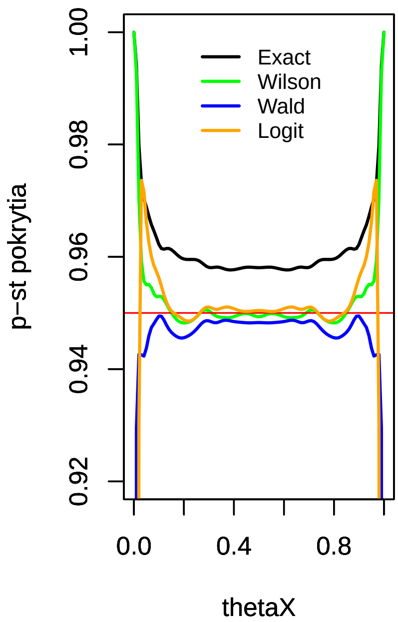
Obr. 3.2: Grafy pravdepodobnosti pokrytia pri zväčšujúcom sa rozsahu výberov pre rozdiel pravdepodobností $\delta = 0$



(a) n = 12 m = 10

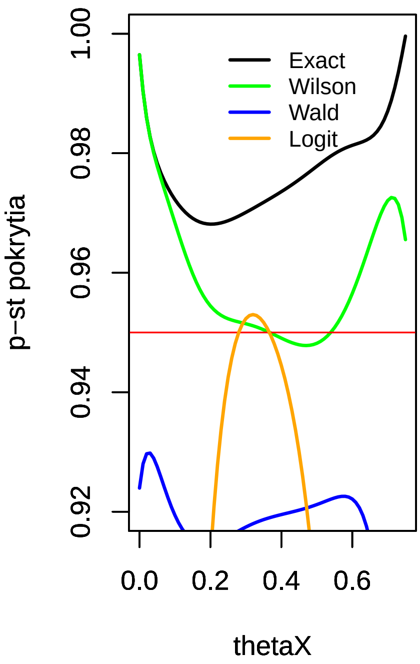


(b) n = 40 m = 30

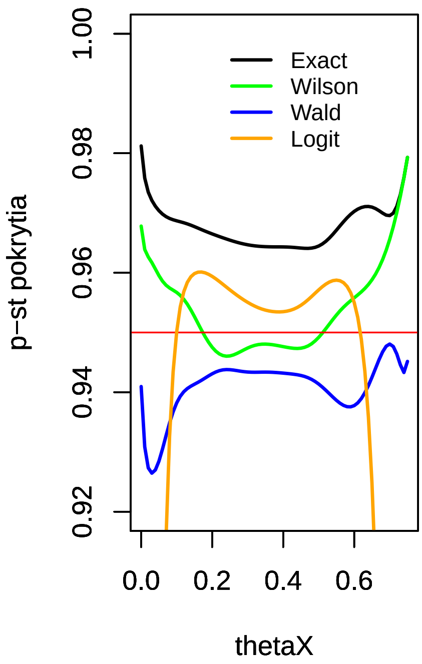


(c) n = 184 m = 156

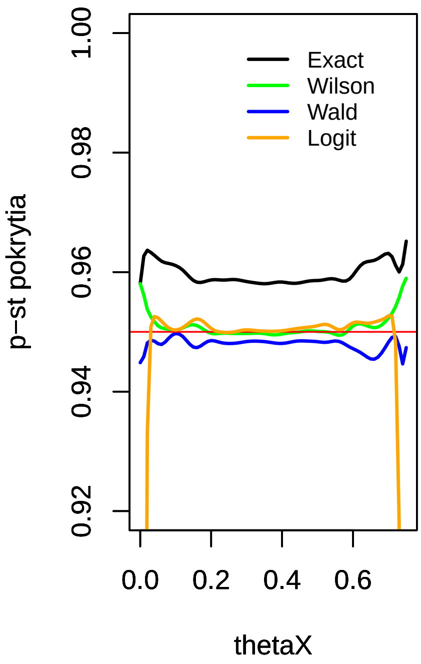
Obr. 3.3: Pravdepodobnosti pokrytia rôznych vstupných intervalov pre rozdiel pravdepodobností $\delta = -0{,}25$ a rozsahy n, m



(a) $\delta = -0{,}25,\ n = 12,\ m = 10$

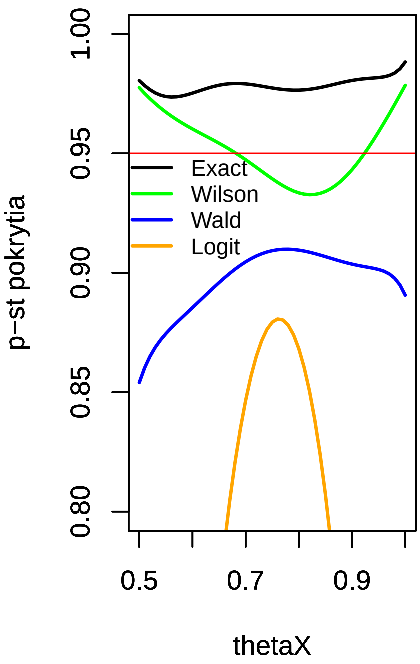


(b) $\delta = -0{,}25,\ n = 40,\ m = 30$

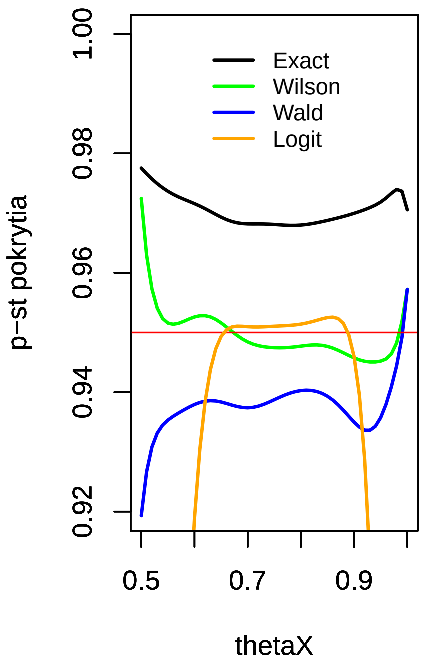


(c) $\delta = -0{,}25,\ n = 184,\ m = 156$

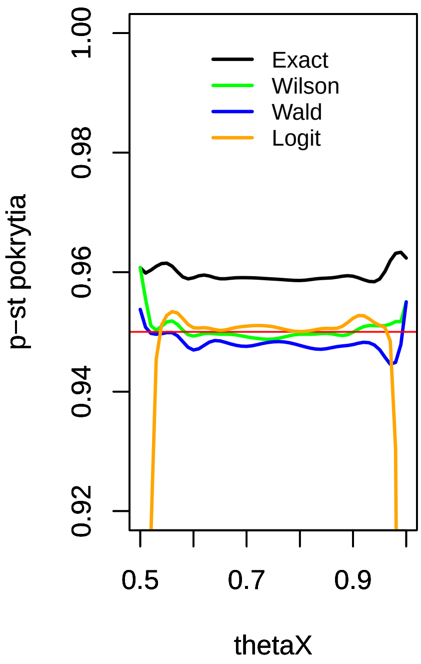
Obr. 3.4: Pravdepodobnosti pokrytia rôznych vstupných intervalov pre rozdiel pravdepodobností $\delta = 0{,}5$ a rozsahy n, m



(a) $\delta = 0{,}5, n = 12, m = 10$



(b) $\delta = 0{,}5, n = 40, m = 30$



(c) $\delta = 0{,}5, \;\; n = 184, \;\; m = 156$

Záver

V našej práci sme sa venovali intervalom spoľahlivosti pre rozdiel parametrov dvoch rozdelení. Na tento problém sme sa pozerali prístupom uvedeným v Newcombe (2013). Dostali sme teda nové intervaly spoľahlivosti, ktoré by nebolo možné, resp. jednoduché, získať inými spôsobmi. Tieto intervaly spoľahlivosti pre rozdiel boli vytvorené použitím hraníc intervalov spoľahlivosti pre jednotlivé parametre metódou zvanou MOVER. Na ilustrovanie použitia a výhod metódy MOVER sme použili konkrétny prípad rozdielu parametrov dvoch alternatívnych rozdelení. Tento prípad je aj prakticky atraktívny, ako sme ukázali na príklade. Z tohto dôvodu je prvá kapitola našej práce venovaná stručnému prehľadu niektorých intervalov spoľahlivosti. Cieľom druhej kapitoly bolo vysvetlenie myšlienky metódy MOVER, poukázanie na nedostatky v textoch Newcombe (2013) a Zou a Donner (2008), nájdenie nejakého súboru postačujúcich podmienok, ktoré by zahrňovali čo najvšeobecnejšie rozdelenia a formálny dôkaz samotnej metódy. Úplná všeobecnosť metódy ale nie je zaručená, tak ako je prezentovaná v Newcombe (2013). Príkladom je rovnomerné rozdelenie, ktoré nespĺňa naše predpoklady a môže nastať problém s vyjadrením hraníc intervalu spoľahlivosti pre rozdiel, vďaka asymptotickým vlastnostiam odhadu jeho parametra.

Na ilustrovanie efektívnosti a účinnosti metódy MOVER sme použili jedno zo základných hodnotiacich kritérií pre intervaly spoľahlivosti, pravdepodobnosť pokrytia, ktorému sa venuje tretia kapitola. Ako vstupné intervaly boli použité intervaly spoľahlivosti pre parameter alternatívneho rozdelenia, pretože alternatívne rozdelenie je príkladom rozdelenia s množstvom rôznych intervalov spoľahlivosti pre jeho parameter. Z grafov pokrytia je vidieť, že metóda najlepšie funguje so vstupným *Wilsonovým* intervalom spoľahlivosti, ktorý má zjavne najbližšiu pravdepodobnosť pokrytia k žiadanej pravdepodobnosti pokrytia (v našom prípade 0,95). Celkovo ale metóda bola účinná, vytvorené intervaly spoľahlivosti sa so zväčšujúcimi rozsahmi výberov blížia k požadovanej hladine 0,95.

Zoznam použitej literatúry

NEWCOMBE, R. G. (2013). *Confidence Intervals for Proportions and Related Measures of Effect Size.* CRC Press. ISBN 978-1-4398-1278-5.

ZOU, G. Y. a DONNER, A. (2008). Construction of confidence limits about effect measures: A general approach. *STATISTICS IN MEDICINE.*

Zoznam obrázkov